# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

**Тема 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ.**

**1.1. Понятие сложной системы.**

Сложная система, составной объект, части которого можно рассматривать как системы, закономерно объединённые в единое целое в соответствии с определенными принципами или связанные между собой заданными отношениями.

Понятием Сложная система пользуются в системотехнике, системном анализе, исследовании операций и при системном подходе в различных областях науки, техники и народный хозяйства. Сложную систему можно расчленить (не обязательно единственным образом) на конечное число частей, называемое подсистемами; каждую такую подсистему (высшего уровня) можно в свою очередь расчленить на конечное число более мелких подсистем и т. д., вплоть до получения подсистем первого уровня, т. н. элементов.

Подсистема, т. о., с одной стороны, сама является Сложной системой из нескольких элементов (подсистем низшего уровня), а с другой стороны - элементом системы старшего уровня.

В каждый момент времени элемент Сложная система находится в одном из возможных состояний; из одного состояния в другое он переходит под действием внешних и внутренних факторов.

**1.2.Задачи исследования сложных систем.**

Одной из важных проблем в области разработки и создания современных сложных технических систем является исследование динамики их функционирования на различных этапах проектирования, испытания и эксплуатации. При исследовании сложных систем возникают задачи исследования как отдельных видов оборудования и аппаратуры, входящих в систему, так и системы в целом.

При проектировании сложных систем ставится задача разработки систем, удовлетворяющих заданным техническим характеристикам. Поставленная задача может быть решена одним из следующих методов:

* методом синтеза оптимальной структуры системы с заданными характеристиками;
* методом анализа различных вариантов структуры системы для обеспечения требуемых технических характеристик.

Оптимальный синтез систем в большинстве случаев практически невозможен в силу сложности поставленной задачи и несовершенства современных методов синтеза сложных систем. Методы анализа сложных систем, включающие в себя элементы синтеза, в настоящее время достаточно развиты и получили широкое распространение.

Любая синтезированная или определенная каким-либо другим образом структура сложной системы для оценки ее показателей должна быть подвергнута испытаниям. Проведение испытаний системы является задачей анализа ее характеристик. Таким образом, конечным этапом проектирования сложной системы, осуществленного как методом синтеза структуры, так и методом анализа вариантов структур, является анализ показателей эффективности проектируемой системы.

Среди известных методов анализа показателей эффективности систем и исследования динамики их функционирования следует отметить*(от худшего к лучшему):*

* аналитический метод; *(Практически невозможен)*
* метод натуральных испытаний; *(затраты + образцы)*
* метод полунатурального моделирования; *(часть устройств + ЭВМ+проблема связи)*
* моделирование процесса функционирования системы на ЭВМ. *(golden boy)*

Строгое аналитическое исследование процесса функционирования сложных систем практически невозможно. Определение аналитической модели сложной системы затрудняется множеством условий, определяемых особенностями работы системы, взаимодействием ее составляющих частей, влиянием внешней среды и т.п.

Натуральные испытания сложных систем связаны с большими затратами времени и средств. Проведение испытаний предполагает наличие готового образца системы или ее физической модели, что исключает или затрудняет использование этого метода на этапе проектирования системы.

Широкое применение для исследования характеристик сложных систем находит метод полунатурального моделирования. При этом используется часть реальных устройств системы. Включенная в такую полунатуральную модель ЭВМ имитирует работы остальных устройств системы, отображенных математическими моделями. Однако в большинстве случаев этот метод также связан со значительными затратами и трудностями, в частности, аппаратной стыковкой натуральных частей с ЭВМ.

Исследование функционирования сложных систем с помощью моделирования их работы на ЭВМ помогает сократить время и средства на разработку. Затраты рабочего времени и материальных средств на реализацию модели оказываются незначительными по сравнению с затратами, связанными с натурным экспериментом. Результаты моделирования по своей ценности для практического решения задач часто близки к результатам натурного эксперимента.

Основной метод исследования сложных систем -- математическое моделирование, в том числе имитация процессов функционирования Сложной системы на ЭВМ (машинный эксперимент).

Концепция применения методов математического моделирования для решения задачи исследования и проектирования сложных систем базируется на следующих основных принципах:

1. Для любой технической системы можно создать математическую модель, которая будет описывать необходимые свойства системы, или ряд моделей.
2. Техническую систему можно исследовать с помощью натурного эксперимента или с помощью математического моделирования.
3. Не всякий натурный эксперимент можно произвести, но всякий эксперимент можно промоделировать.
4. Инженерные решения можно принимать на основе адекватных математических моделей.
5. Для получения адекватных математических моделей необходим эксперимент.
6. Чтобы научиться разрабатывать адекватные математические модели можно применять сравнение численных результатов с теоретическими результатами на основе аналитических решений.
7. Математическая модель состоит из: уравнений, параметров, граничных условий.
8. Ошибка в любом компоненте математической модели даст ошибку в результате математического моделирования.
9. Конечным подтверждением принятого технического решения является натурный эксперимент.

**1.3.Основные принципы моделирования**

**Принцип информационной достаточности.** (*0 данных = невозможно, 1 данных = бессмысленно, между 0 и 1 есть уровень информационной достаточности*). При полном отсутствии информации об исследуемой системе построение ее модели невозможно. При наличии полной информации о системе ее моделирование лишено смысла. Существует некоторый критический уровень априорных сведений о системе (уровень информационной достаточности), при достижении которого может быть построена ее адекватная модель.

**Принцип осуществимости.** Создаваемая модель должна обеспечить достижение поставленной цели исследования с вероятностью, ~~существенно отличающейся от~~ больше нуля, и за конечное время. Обычно задают некоторое пороговое значение P0 вероятности достижения цели моделирования P(t), а также приемлемую границу t0 времени достижения этой цели. Модель считают осуществимой, если одновременно выполнены два неравенства:

P(t) ≥P0 ; t ≤ t0

*(Вероятность достижения цели P(t) выше порога , время меньше границы времени )*

**Принцип множественности моделей.** Данный принцип, несмотря на его порядковый номер, является ключевым. Речь идет о том, что создаваемая модель должна отражать в первую очередь те свойства реальной системы (или явления), которые влияют на выбранные показатели эффективности. Соответственно при использовании любой конкретной модели познаются лишь некоторые стороны реальности. Для более полного ее исследования необходим ряд моделей, позволяющих с разных сторон и с разной степенью детальности отражать рассматриваемый процесс.

**Принцип агрегирования.** *(большую систему можно представить в виде подсистем)*. В большинстве случаев сложную систему можно представить состоящей из агрегатов (подсистем), для адекватного математического описания которых оказываются пригодными некоторые стандартные математические схемы. Принцип агрегирования позволяет, кроме того, достаточно гибко перестраивать модель в зависимости от задач исследования.

**Принцип параметризации.** В ряде случаев моделируемая система имеет в своем составе некоторые относительно изолированные подсистемы, характеризующиеся определенным параметром, в том числе векторным. Такие подсистемы можно заменять в модели соответствующими числовыми величинами, а не описывать процесс их функционирования. При необходимости зависимость значений этих величин от ситуации может задаваться в виде таблицы, графика или аналитического выражения (формулы). Принцип параметризации позволяет сократить объем и продолжительность моделирования. Однако надо иметь в виду, что параметризация снижает адекватность модели.

Степень реализации перечисленных принципов в каждой конкретной модели может быть различной, причем это зависит не только от желания разработчика, но и от соблюдения им технологии моделирования. А любая технология предполагает наличие определенной последовательности действий.

**Компьютерное моделирование - это математическое моделирование с использованием** **средств вычислительной техники.** Соответственно, технология компьютерного моделирования предполагает выполнение следующих действий:

1. определение цели моделирования;
2. разработка концептуальной модели;
3. формализация модели;
4. программная реализация модели;
5. планирование модельных экспериментов;
6. реализация плана эксперимента;
7. анализ и интерпретация результатов моделирования.

Содержание первых двух этапов практически не зависит от

математического метода, положенного в основу моделирования (и даже наоборот – их результат определяет выбор метода). А вот реализация остальных шести существенно различается для каждого из двух основных подходов к построению модели. Именуются эти подходы в разных книгах по – разному, мы используем для их обозначения термины «аналитическое» и «имитационное» моделирование.

**Аналитическое моделирование** предполагает использование математической модели реального объекта в форме алгебраических, дифференциальных, интегральных и других уравнений, связывающих выходные переменные с входными, дополненных системой ограничений. При этом предполагается наличие однозначной вычислительной процедуры получения точного решения уравнений.

При **имитационном** **моделировании** используемая математическая модель воспроизводит логику («алгоритм») функционирования исследуемой системы во времени при различных сочетаниях значений параметров системы и внешней среды.

Примером простейшей аналитической модели может служить уже упоминавшееся уравнение прямолинейного движения. При исследовании такого процесса с помощью имитационной модели должно быть реализовано наблюдение за изменением пройденного пути с течением времени.

Очевидно, в одних случаях более предпочтительным является аналитическое моделирование, в других – имитационное (или сочетание того и другого). Чтобы выбор был удачным, необходимо ответить на два вопроса:

* с какой целью проводится моделирование;
* к какому классу может быть отнесено моделируемое явление.

Ответы на оба эти вопроса могут быть получены в ходе выполнения двух первых этапов моделирования.

**1.4.Концептуальная модель**

**Концептуальная** (содержательная) **модель** - это абстрактная модель, определяющая структуру моделируемой системы, свойства ее элементов и причинно – следственные связи, присущие системе и существенные для достижения цели моделирования.

Построение концептуальной модели включает следующие этапы:

1) определение типа системы;

2) описание рабочей нагрузки;

3) декомпозиция системы.

На первом этапе осуществляется сбор фактических данных (на основе работы с литературой и технической документацией, проведения натурных экспериментов, сбора экспертной информации и т.д.), а также выдвижение гипотез относительно значений параметров и переменных, в тех случаях, когда отсутствует возможность получения фактических данных. Если полученные результаты соответствуют принципам информационной достаточности и осуществимости, то они могут служить основой для отнесения моделируемой системы к одному из известных типов (классов).

Наиболее важные в этом отношении **классификационные признаки** приведены ниже.

**1. множество** **состояний** моделируемой системы. ~~По этому признаку системы делят на статические и динамические~~. Система называется статической, если множество ее состояний содержит один элемент. Если состояний больше одного, и они могут изменяться во времени, система называется динамической.

Различают два основных типа динамических систем:

* с дискретными состояниями (множество состояний конечно или счетно);
* ~~с непрерывным~~ множеством состояний непрерывно.

Возможны смешанные случаи.

2. **движением** **системы --** процесс смены состояний.

Смена состояний может происходить либо в фиксированные моменты времени, множество которых дискретно и заранее определено (например, поступление новых партий товара на склад), либо непрерывно (изменение курсов валюты в ходе торгов). ~~При этом различают детерминированные системы и стохастические~~.

В детерминированных системах новое состояние зависит только от времени и текущего состояния системы. Другими словами, если имеются условия, определяющие переход системы в новое состояние, то для детерминированной системы можно однозначно указать, в какое именно состояние она перейдет.

Для стохастической системы можно указать лишь множество возможных состояний перехода и, в некоторых случаях, вероятности перехода в каждое из этих состояний.

Рассмотренная схема классификации систем важна не сама по себе. На этапе разработки концептуальной модели она, во – первых, позволяет уточнить цели и задачи моделирования и, во – вторых, облегчает переход к этапу формализации модели, знание классификационных признаков дает возможность оценить степень ее соответствия первоначальному замыслу разработчика.

3. **рабочая** **нагрузка** – это совокупность внешних воздействий, оказывающих влияние на эффективность применения данной системы в рамках решаемой задачи,

Описание рабочей нагрузки является не только важной, но и достаточно сложной задачей. Особенно в тех случаях, когда приходится учитывать влияние случайных факторов, или когда идет о рабочей проектируемой принципиальной новой системы. В связи с этим многие вводят понятие модели рабочей нагрузки, подчеркивая сопоставимость уровня сложности описания собственно системы и ее рабочей нагрузки.

Модель рабочей нагрузки (РН) должна обладать следующими основными свойствами:

* совместимостью с моделью системы;
* представительностью;
* управляемостью;
* системной независимостью.

Свойство **совместимости** предполагает, что, во – первых степень детализации описания РН соответствует детализации описания системы; во – вторых, модель РН должна быть сформулирована в тех же категориях предметной области, что и модель системы. Например, если в модели системы исследуется использование ресурсов, РН должна быть выражена в запросах на ресурсы;

**Представительность** модели РН определяется ее способностью адекватно представить РН в соответствии с целями исследования. Другими словами, модель РН должна отвечать целям исследования системы. Например, если оценивается пропускная способность, должна выбирать РН, «насыщающая» систему.

Под **управляемостью** понимается возможность изменения параметров модели РН в некотором диапазоне, определяемом целями исследования.

**Системная** **независимость** – это возможность переноса модели РН с одной системы на другую с сохранением ее представительности. Данное свойство наиболее важно при решении задачи сравнения различных систем или различных модификаций одной системы. Если модель РН зависит от конфигурации исследуемой системы или других ее параметров, то использование такой модели для решения задачи выбора невозможно.

И наконец, обратимся к этапу, завершающему построение концептуальной модели системы – ее декомпозиции.

**4. Декомпозиция** **системы** производится исходя из выбранного уровня детализации модели, который, в свою очередь, определяется тремя факторами:

* целями моделирования;
* объемом априорной информации о системе;
* требованиями к точности и достоверности результатов моделирования.

Уровни детализации иногда называют **стратами**, а процесс выделения уровней – **стратификацией**.

Детализация системы должна производиться до такого уровня, чтобы для каждого элемента были известны или могли быть получены зависимости его выходных характеристик от входных воздействий, существенные с точки зрения выбранного показателя эффективности.

Повышение уровня детализации описания системы позволяет получить более точную ее модель, но усложняет процесс моделирования и ведет к росту затрат времени на проведение.

При имитационном моделировании для оценки выбранного уровня детализации можно использовать специальные критерии.

1. Отношение реального времени функционирования системы к времени моделирования (т. е. к затратам машинного времени, необходимого на проведение модельного эксперимента). Например, если при одних и мех же подходах к программной реализации модели моделирование одного часа работы системы требует в одном случае 3 минуты машинного времени, а в другом – 10 минут, то во втором случае степень детализации описания выше (соотношение 3:10).
2. разрешающая способность модели, в том числе:

разрешающая способность по времени – может быть определена как кратчайший интервал модельного времени между соседними событиями;

разрешающая способность по информации–наименьшая идентифицируемая порция информации, представимая в модели (для вычислительных систем, например, такими порциями могут быть слово, страница, программа, задание).

1. число различных моделируемых состояний системы (или типов).

Для тех компонентов, относительно которых известно или предполагается, что они сильнее влияют на точность результатов, степень детальности может быть выше других.

Необходимо отметить, что с увеличением степени детализации возрастает устойчивость модели, но возрастают и затраты машинного времени на проведение модельного эксперимент.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

**Тема 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ**

Под математическим моделированием понимают способ исследования различных процессов путем изучения явлений, имеющих различное физическое содержание, но описываемых одинаковыми математическими соотношениями. При изучении любого процесса методом математического моделирования необходимо в первую очередь построить его математическое описание, или, как мы далее будем говорить, математическую модель. В простейших случаях математическая модель позволяет для данного процесса-оригинала подобрать на основании известных аналогий удобные физические процессы-модели, а также установить соотношения подобия, связывающие их параметры, без которых трудно использовать результаты моделирования для изучения процесса-оригинала. В более сложных случаях, когда для моделирования создаются специальные моделирующие установки (стенды) или используются вычислительные машины, математическая модель необходима для определения структуры и параметров стенда или построения моделирующего алгоритма.

**2.1. Понятие математической модели**

Математическая модель, описывает формализованный процесс

функционирования системы и в состоянии охватить только основные, характерные его закономерности.

Процесс функционирования любой системы будем рассматривать как последовательную смену ее состояний в некотором интервале времени (t0,t1). Состояния системы (Z) в каждый момент времени t из упомянутого интервала характеризуются набором величин z1, z2, …, zn. Процесс функционирования системы рассматриваем как последовательную смену состояний, и z1(t), z2(t), …,

zn(t) являются функциями времени t. В дальнейшем будем называть их характеристиками состояний системы.

**Под математической моделью реальной системы будем понимать совокупность соотношений (например, формул, уравнений, неравенств, логических условий, операторов и т. д.), определяющих характеристики состояний системы (а через них и выходные сигналы) в зависимости от параметров системы, входных сигналов, начальных условий и времени.**

Однако при исследовании реальных систем не всегда удается построить математические модели в виде явных функций или уравнений.

Перейдем к некоторым общим замечаниям, связанным с понятием математической модели.

1. Однозначность определения характеристик состояний системы и выходных сигналов через параметры системы, входные сигналы и начальные условия. Это требование выполняется для так называемых детерминированных моделей, представляющих собой совокупность неслучайных соотношений. Если при этом начальные условия и входные сигналы не случайны, то модель оказывается вполне детерминированной. На практике нередко приходится рассматривать случайные процессы функционирования различных систем. Характеристики состояний системы для таких процессов оказываются случайными функциями времени. Будем говорить, что при помощи математической модели однозначно определяются распределения вероятностей для характеристик состояний системы, если заданы распределения вероятностей для начальных условий, параметров системы и возмущений, действующих на ее элементы, а также для входных сигналов.
2. Выбор совокупности параметров, характеризующих исследуемую систему. Реальные процессы, если их рассматривать во всех деталях, весьма сложны. Учет большого количества второстепенных деталей оказывается практически нецелесообразным. В большинстве случаев при решении прикладных задач достаточно учитывать лишь основные стороны исследуемого процесса. Поэтому обычно при построении математической модели процесса ограничиваются сравнительно небольшим количеством параметров. В таких условиях, естественно, об однозначности определения набора параметров, характеризующих систему, не может быть и речи.
3. Определение совокупности начальных условий. На этапе формализации процесса, когда контуры математической модели еще недостаточно выяснены, определить перечень начальных условии не представляется возможным. Когда же математическая модель построена, перечень начальных условий может быть определен однозначно. Естественно, что перечень начальных условий зависит от того, какие выбраны характеристики состояний системы.

Математическая модель может появиться только как следствие четкого формального описания рассматриваемого процесса с требуемой степенью приближения к действительности, только в результате формализации процесса.

2.2. Формализация процессов функционирования сложных систем

Математическая модель является результатом формализации процесса, т. е.

построения четкого формального (математического) описания процесса с необходимой степенью приближения к действительности.

Модель объекта моделирования, т. е. системы S, можно представить в виде множества величин, описывающих процесс функционирования реальной системы и образующих в общем случае следующие подмножества:

· совокупность **входных воздействий (X)** на систему хÎХ,i=1,..;

· совокупность **воздействий внешней среды (V)** viÎV, i=1, ..,nv**;**

· совокупность **внутренних (собственных) параметров (H)** системы hiÎH, i=1, ..,nh**;**

· совокупность **выходных характеристик (Y)** системы yiÎY, i=1, ..,ny**;**

Причем в перечисленных подмножествах можно выделить управляемые и неуправляемые переменные.

Совокупность зависимостей выходных характеристик системы от времени уj(t) для всех видов j=1,…, nу называется **выходной траекторией** . Зависимость называется законом функционирования системы S и обозначается Fs.

Весьма важным для описания и исследования системы S является понятие **алгоритма функционирования As**, под которым понимается метод получения выходных характеристик с учетом входных воздействий x(t), воздействий внешней среды v(t) и собственных параметров системы h (t). Очевидно, что один и тот же закон функционирования Fs системы S может быть реализован различными способами, т. е. с помощью множества различных алгоритмов функционирования As.

Очевидно, что детерминированная модель является частным случаем стохастической модели.

Приведенные математические соотношения представляют собой математические схемы общего вида и позволяют описать широкий класс систем. Однако в практике моделирования на первоначальных этапах исследования системы рациональнее использовать **типовые математические схемы**: дифференциальные уравнения, конечные и вероятностные автоматы, системы массового обслуживания и т. д.

При построении математических моделей процессов функционирования систем можно выделить следующие основные подходы: непрерывно– детерминированный (например, дифференциальные уравнения); дискретно– детерминированный (конечные автоматы); дискретно-стохастический (вероятностные автоматы); непрерывно-стохастический (системы массового обслуживания); обобщенный или универсальный (агрегативные системы).

Математические схемы, рассматриваемые в последующих параграфах данной главы, должны помочь оперировать различными подходами в практической работе при моделировании конкретных систем.

**3.Математические схемы**

**2.3.1.Непрерывно-детерминированные модели (D-схемы)** *(dynamic)*

Обычно в таких математических моделях в качестве независимой переменной, от которой зависят неизвестные искомые функции, служит время t. Тогда математическое соотношение для детерминированных систем в общем виде будет

,

где:

-- n-мерные векторы,

и



-- вектор-функция, которая определена на некотором (n+1)—мерном

множестве (ŷ,t) и является непрерывной.

Так как математические схемы такого вида отражают динамику изучаемой системы, т. е. ее поведение во времени, то они называются **D-схемами** (англ. dynamic)**.**

Использование D-схем позволяет формализовать процесс функционирования непрерывно–детерминированных систем S и оценить их основные характеристики, применяя аналитический или имитационный подход, реализованный в виде соответствующего языка для моделирования непрерывных систем или использующий аналоговые и гибридные средства вычислительной техники.

**2.3.2. Дискретно-детерминированные модели (f-схемы)** *(*finite automata*)*

Особенности дискретно–детерминированного подхода на этапе формализации процесса функционирования систем может быть рассмотрен на примере использования в качестве математического аппарата теории автоматов. На основе этой теории система представляется в виде автомата, перерабатывающего дискретную информацию и меняющего свои внутренние состояния лишь в допустимые моменты времени.

Абстрактно конечный автомат (англ. finite automata) можно представить как математическую схему **(F-схему**), характеризующуюся шестью элементами:

· конечным множеством Х входных сигналов (входным алфавитом);

· конечным множеством Y выходных сигналов (выходным алфавитом);

· конечным множеством Z внутренних состояний (внутренним алфавитом или алфавитом состояний);

· начальным состоянием z0, z0 Î Z;

· функцией переходов j (z,x); *(фи)*

· функцией выходов y (z, x*). (пси)*

Автомат, задаваемый F-схемой, принято обозначать:

F=<**Z, X,** **Y**, j,y,z0>.

Абстрактный конечный автомат имеет один входной и один выходной каналы. В каждый момент t=0, 1, 2,... дискретного времени F-автомат находится в определенном состоянии z(t) из множества **Z** состояний автомата, причем в начальный момент времени t=0 он всегда находится в начальном состоянии z(0)=zo. В момент t, будучи в состоянии z(t), автомат способен воспринять на входном канале сигнал x(t) Î X и выдать на выходном канале сигнал у(t)= y [z(t), x(t)], переходя в состояние z(t+1)= = j [z(t),x(t)], z(t) Î **Z**, y(t) Î **Y**. Другими словами, если на вход конечного автомата, установленного в начальное состояние z0, подавать в некоторой последовательности буквы входного алфавита х(0), х(1), х(2),..., т. е. входное слово, то на выходе автомата будут последовательно появляться буквы выходного алфавита у(0), у(1), у (2),..., образуя выходное слово.

Сказанное выше можно описать следующими уравнениями: для F-автомата первого рода, называемого также автоматом Мили *(выходы у(t) от сост. системы z(t), входы x(t))*,

z(t+1) = j [z(t),x(t)], у(t)= y [z(t), x(t)], t=0,1,2,...; (2.1)

для F-автомата второго рода

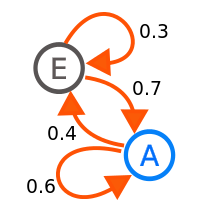
z(t+1) =j [z(t),x(t)], у(t)= y [z(t), x(t-1)], t=0,1,2,...; (2.2)

Автомат второго рода, для которого у(t)= y [z(t)], t=0,1,2,..., т. е. функция выходов не зависит от входной переменной х (t), называется автоматом Мура*(выходы y(t) от сост. системы z(t))*.

По числу состояний различают конечные автоматы с памятью и без памяти. Автоматы с памятью имеют более одного состояния, а автоматы без памяти (комбинационные или логические схемы) обладают лишь одним состоянием.

По характеру отсчета дискретного времени конечные автоматы делятся на синхронные и асинхронные. В синхронных F-автоматах моменты времени, в которые автомат «считывает» входные сигналы, определяются принудительно синхронизирующими сигналами. Реакция автомата на каждое значение входного сигнала заканчивается за один такт, длительность которого определяется интервалом между соседними синхронизирующими сигналами. Асинхронный Fавтомат считывает входной сигнал непрерывно и поэтому, реагируя на достаточно длинный входной сигнал постоянной величины х, он может, несколько раз изменять состояние, выдавая соответствующее число выходных сигналов, пока не перейдет в устойчивое, которое уже не может быть изменено данным входным.

**2.3.3. Дискретно-стохастические модели (Р-схемы)**  *(вероятностные автоматы)*

Рассмотрим особенности построения математических схем при дискретно-стохастическом подходе к формализации процесса функционирования исследуемой системы S. Поскольку сущность дискретизации времени при этом подходе остается аналогичной рассмотренным конечным автоматам, то влияние фактора стохастичности проследим также на разновидности таких автоматов, а именно на вероятностных (стохастических) автоматах. В общем виде вероятностный автомат (англ. probabilistic automat) можно определить как дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти в нем и может быть описано статистически.

Вероятностный автомат может быть описан либо таблицей переходов, либо матрицей переходов Р-автомата и начальным распределением вероятностей. Математический аппарат, используемый при исследовании Р-автоматов, является аппарат марковских цепей. *(цепь с двумя состояниями)*

**2.3.4. Непрерывно-стохастические модели (q-схемы)**  *(системы массового обслуживания)*

Особенности непрерывно-стохастического подхода рассмотрим на примере использования в качестве типовых математических схем систем массового

обслуживания, (англ. queueing system), которые будем называть Q-схемами. Системы массового обслуживания представляют собой класс математических схем, разработанных в теории массового обслуживания и различных приложениях для формализации процессов функционирования систем, которые по своей сути являются процессами обслуживания.

В качестве процесса обслуживания могут быть представлены различные по своей физической природе процессы функционирования экономических, производственных, технических и других систем, например: потоки поставок продукции некоторому предприятию, потоки деталей и комплектующих изделий на сборочном конвейере цеха, заявки на обработку информации ЭВМ от удаленных терминалов и т. д. При этом характерным для работы таких объектов является случайное появление заявок (требований) на обслуживание и завершение обслуживания в случайные моменты времени, т. е. стохастический характер процесса их функционирования. Остановимся на основных понятиях массового обслуживания, необходимых для использования Q-схем как при аналитическом, так и при имитационном подходе.

Работа любой системы массового обслуживания состоит в выполнении поступающего на ее вход потока заявок. Заявки поступают в некоторые, в общем случае случайные, моменты времени. Обслуживание заявки продолжается какое-то время, также случайное, после чего канал освобождается для обслуживания следующей заявки. Предмет теории массового обслуживания – установление зависимостей между характером потока заявок, производительностью отдельного канала обслуживания, числом каналов и эффективностью обслуживания.

Случайный процесс, протекающий в СМО состоит в том, что система в случайные моменты времени переходит из одного состояния в другое. СМО представляет собой физическую систему дискретного типа, а переход системы из одного состояния в другое происходит скачком.

Рассмотрим физическую систему Z со счетным множеством состояний , *,…,*

В любой момент времени t система Z может быть в одном из этих состояний.

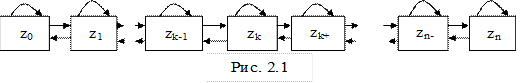
Обозначим – вероятность того, что в момент t система будет находиться в состоянии . Очевидно, для любого t

Совокупность вероятностей для каждого момента времени t характеризует данное сечение случайного процесса, протекающего в системе. Эта совокупность не является исчерпывающей характеристикой процесса (она, например, совсем не отражает зависимости между сечениями), но все же достаточно хорошо описывает процесс и для ряда практических применений оказывается достаточной

Случайные процессы со счетным множеством состояний бывают двух типов:

1. С дискретным временем: переходы из состояния в состояние могут происходить только в строго определенные, разделенные конечными интервалами моменты времени t1, t2 … .
2. С непрерывным временем: переход системы из состояния в состояние возможен в любой момент времени.

Случайные процессы, протекающие в СМО как правило являются процессами с непрерывным временем. Граф перехода системы из состояния в состояние может быть проиллюстрирован рис. 2.1.



Примеры из книги Черушевой 2021 (там состоянием Z выступает X)

Изображение выглядит как текст, часы

Автоматически созданное описание1) Истребители, которые выходят из строя *(необратимые переходы, пораженные самолеты не восстанавливаются)*

x0 – не поражено ни одного самолета,

x1 – поражен ровно один самолет,

………….

xk – поражено ровно k самолетов,

………….

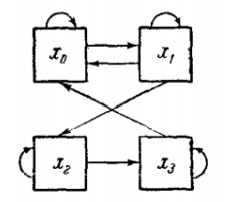
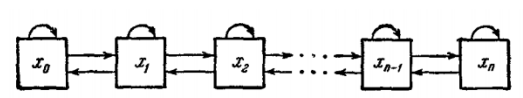
xn – поражены все n самолетов

*Изображение выглядит как текст, небо, знак

Автоматически созданное описание*2) Телефонный канал размером 1.

x0 – канал свободен,

x1 – канал занят.

3)Телефонный канал размером n 

4) одноканальную систему массового обслуживания, которая может находиться в четырех состояниях:

x0 – канал исправен и свободен,

x1 – канал исправен и занят,

x2 – канал неисправен и ждет ремонта,

x3 – канал неисправен и ремонтируется.

**2.3.5. Обобщенные модели (А-схемы)**

<https://itmodeling.fandom.com/ru/wiki/%D0%9E%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%BC%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B8_(%D0%90-%D1%81%D1%85%D0%B5%D0%BC%D1%8B)>

Наиболее известным общим подходом к формальному описанию процессов функционирования систем является подход, предложенный Н.П.Бусленко. Этот подход позволяет описывать поведение непрерывных и дискретных, детерминированных и стохастических, т.е. по сравнению с рассмотренными является обобщенным (универсальным) и базируется на понятии агрегатируемой системы, представляющей собой формальную схему общего вида, которую принято называть А-схемой.

Анализ существующих средств моделирования показывает, что комплексное решение проблем, возникающих в процессе создания и реализации модели, возможно только в том случае, когда моделирующие системы имеют в своей основе единую формальную математическую схему. Такая схема А-схема должна выполнять следующие функции:

1. · являться адекватным математическим описанием объекта моделирования; *(Для получения адекватных математических моделей необходим эксперимент. )*

· служить основой для построения алгоритмов и программ, реализующих модель;

· позволять в упрощенном варианте *(для частных случаев)* проводить аналитические исследования.

В качестве элемента А-схемы выступает агрегат. Связь между агрегатами (внутри системы S и внешней средой Е) осуществляется оператором *сопряжения* R. Агрегат может *(рассматриваться как А-схема т.е.*) разбиваться на агрегаты следующего уровня.

Любой агрегат характеризуется следующими множествами:

· моментами времени Т;

· входными сигналами Х;

· выходными сигналами У;

· состояниями на каждый момент времени Z(t).

Пусть переход агрегата из состояния {\displaystyle z(t_{1})} в состояние {\displaystyle z(t_{2})\neq z(t_{1})} происходит за малый интервал времени, т.е. имеет место скачок {\displaystyle \delta z}. Переходы из состояния {\displaystyle z(t_{1})} в {\displaystyle z(t_{2})} определяются внутренними параметрами агрегата {\displaystyle h(t)\in H} и входными сигналами {\displaystyle x(t)\in X}

В начальный момент времени {\displaystyle t0}  агрегат находится в состоянии z(t0)=z0, которое задается законом L(z(t0)).

Процесс функционирования агрегата в случае воздействия сигнала xn описывается случайным оператором V. Пусть в момент времени tn поступил сигнал xn. Состояние агрегата определиться так:

Z(tn+0)=V(tn,z(tn),xn).

Если в течение времени (tn,tn+1) не пришло ни одного входного сигнала, то агрегат может перейти в другое состояние за счет изменение внутреннего состояния в соответствии со случайным оператором U:

{\displaystyle z(t)=U[t,t_{n},z(t_{n}+0)}

Совокупность случайных операторов V и U рассматривается как оператор перехода автомата в новые состояния. При этом процесс функционирования агрегата состоит из скачков состояний δz в моменты поступления новых сигналов х и изменений состояний агрегата между этими моментами(оператор {\displaystyle U}). На оператор U не накладывается никаких ограничений, поэтому допустимы скачки состояний {\displaystyle \delta z}  в моменты времени, не являющиеся моментами поступления входных сигналов x. В дальшейшем моменты скачков {\displaystyle \delta z}  будем называть особыми моментами времени {\displaystyle t_{\delta }}, а состояния  {\displaystyle z(t_{\delta })} – особыми состояниями А-схемы.

Для описания скачков в особые моменты {\displaystyle t_{\delta }} используется *случайный* оператор W, представляющий собой частный случай оператора U:

В множестве состояний Z агрегата выделяется подмножество Z(Y), что если достигает Z(Y), то это состояние является моментом выдачи выходного сигнала. Выходной сигнал можно описать оператором выходов G

y=G(tδ,z(tδ)). y **∈ Y**

Таким образом, под агрегатом будем понимать объект, определяемый упорядоченной совокупностью рассмотренных множеств T, X, Y, Z, Z(Y), H и случайных операторов V, U, W, G.

Последовательность входных сигналов, расположенных в порядке поступления их на вход А-схемы называют входным сообщением, а последовательных выходных – выходным сообщением.

Существует класс больших систем, которые ввиду их сложности не могут быть формализованы в виде математических схем одиночных агрегатов, поэтому их формализуют некоторой конструкцией из отдельных агрегатов. Для описания системы в целом, необходимо иметь описание как отдельных агрегатов, так и связей между ними.

Для построения формального понятия А-схемы необходимо выбрать способы математического описания взаимодействия между агрегатами. Для этого вводится ряд предположений о закономерностях функционирования А-схем, которые согласуются с опытом исследования реальных сложных систем:

· взаимодействие между А-схемой и внешней средой Е, а также между отдельными агрегатами внутри системы осуществляется при передаче сигналов, причем взаимные влияния, имеющие место вне механизма передачи сигналов не учитываются;

· для описания сигнала достаточно некоторого конечного набора характеристик;

· элементарные сигналы мгновенно передаются в А-схеме независимо друг от друга по элементарным каналам;

· ко входному контакту любого элемента А-схемы подключается не более чем один элементарный канал, к выходному контакту – любое конечное число элементарных каналов.

Взаимодействие А-схемы с внешней средой рассматривается как обмен сигналами между внешней средой и элементами А-схемы. В связи с этим внешнюю среду можно представить в виде фиктивного элемента А-схемы.

Таким образом, использование обобщенной типовой математической схемы моделирования А-схемы в принципе не отличается от использования рассмотренных ранее D, F, P, Q-схем. Для частного случая результаты могут быть получены аналитическим методом. В более сложных случаях прибегают к имитационному методу.

Представление объекта моделирования в виде А-схемы может являться тем фундаментом, на котором базируется построение имитационной системы и ее внешнего и внутреннего математического обеспечения. Стандартная форма представления исследуемого объекта в виде А-схемы приводит к унификации не только алгоритмов имитации, но и к возможности применять стандартные методы обработки и анализа результатов моделирования.

# ПЛАНИРОВАНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

**Тема 9. ПЛАНИРОВАНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ**

Планирование модельных экспериментов преследует две основные цели:

· сокращение общего объема испытаний при соблюдении требований к достоверности и точности их результатов;

· повышение информативности каждого из экспериментов в отдельности.

Поиск плана эксперимента производится в так называемом факторном пространстве.

**Факторное пространство** – это множество внешних и внутренних параметров модели, значения которых исследователь может контролировать в ходе подготовки и проведения модельного эксперимента.

Поскольку факторы могут носить как количественный, так и качественный характер (например, отражать некоторую стратегию управления), значения факторов обычно называют уровнями. Эксперимент активный = при его проведении исследователь может изменять уровни. Пассивный = не может изменять уровни.

Введем еще несколько терминов, используемых в теории планирования эксперимента.

Каждый из факторов имеет верхний и нижний уровни, расположенные симметрично относительно некоторого нулевого уровня. Точка в факторном пространстве, соответствующая нулевым уровням всех факторов, называется центром плана.

**Интервалом варьирования фактора** называется некоторое число J, прибавление которого к нулевому уровню дает верхний уровень, а вычитание – нижний.

Как правило, план эксперимента строится относительно одного (основного) выходного скалярного параметра Y, который называется наблюдаемой переменной. Если моделирование используется как инструмент принятия решения, то в роли наблюдаемой переменной выступает показатель эффективности.

При этом предполагается, что значение наблюдаемой переменной, полученное в ходе эксперимента, складывается из двух составляющих:

y = f(x) + e(x), где

f(x) – функция отклика (неслучайная функция факторов);

e(x) – ошибка эксперимента (случайная величина) ;

x – точка в факторном пространстве (определенное сочетание уровней факторов);

Очевидно, что y является случайной переменной, так как зависит от случайной величины e(x).

Дисперсия Dy наблюдаемой переменной, которая характеризует точность измерений, равна дисперсии ошибки опыта: Dy = De .

Dy называют дисперсией воспроизводимости эксперимента. Она характеризует качество эксперимента. Эксперимент называется идеальным при D y = 0.

Существует два основных варианта постановки задачи планирования имитационного эксперимента:

Из всех допустимых выбрать такой план, который позволили бы получить задачи планирования имитационного эксперимента:

1. Из всех допустимых выбрать такой план, который позволил бы получить наиболее достоверное значение функции отклика f(x) при фиксированном числе опытов. *(Решение задачи планирования = стратегическое планирование эксперимента)*
2. Из всех допустимых выбрать такой план, при котором статистическая оценка функции отклика может быть получена с заданной точностью при минимальном объеме испытаний. *(Решение задачи планирования = тактическое планирование эксперимента)*

Решение задачи планирования в первой постановке называется стратегическим планирование эксперимента, во второй – тактическим планирование.

**9.1.Стратегическое планирование имитационного эксперимента.**

Итак, цель методов стратегического планирования имитационных экспериментов получение максимального объема информации об исследуемой системе в каждом эксперименте (наблюдении). Другими словами, стратегическое планирование позволяет ответить на вопрос, при каком сочетании уровней внешних и внутренних факторов может быть получена наиболее полная и достоверная информация о поведении системы.

При стратегическом планировании эксперимента должны быть решены две основные задачи:

· Идентификация факторов;

· Выбор уровней факторов.

Под идентификацией факторов понимается их ранжирование по степени влияния на значение наблюдаемой переменной (показателя эффективности).

По итогам идентификации целесообразно разделить все факторы на две группы – первичные и вторичные. Первичные – это те факторы, в исследовании влияния которых экспериментатор заинтересован непосредственно. Вторичные - факторы, которые не являются предметом исследования, но влиянием которых нельзя пренебречь.

Выбор уровней факторов производится с учетом двух противоречивых требований:

· Уровни фактора должны перекрывать (заполнять) весь возможный диапазон его изменения;

· Общее количество уровней по всем факторам не должно приводить к чрезмерному объему моделирования.

Отыскание компромиссного решения, удовлетворяющего этим требованиям, и является задачей стратегического планирования эксперимента.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом (ПФЭ).

Общее число различных комбинаций уровней в ПФЭ для k факторов можно вычислить так: *N = l1\* l2\*…\* lk*, где li – число уровней i-го фактора.

Если число уровней для всех факторов одинаково, то N = L k (L – число уровней).

Недостаток ПФЭ – большие временные затраты на подготовку и проведение.

Например, если в модели отражены 4 фактора ,влияющие на значение выбранного показателя эффективности, каждый из которых имеет 3 возможных уровня (значения), то план проведения ПФЭ будет включать 81 эксперимент (N = 3\*3\*3\*3). Если при этом каждый из них длится хотя бы одну минуту (с учетом времени на изменение значений факторов), то на однократную реализацию ПФЭ потребуется более часа.

Поэтому использование ПФЭ целесообразно только в том случае, если в ходе имитационного эксперимента исследуется взаимное влияние всех факторов, фигурирующих в модели.

Если такие взаимодействия считают отсутствующими или их эффектом пренебрегают, проводят частичный факторный эксперимент (ЧФЭ).

Известны и применяются на практике различные варианты построения планов ЧФЭ. Мы рассмотрим только некоторые из них.

1. Рандомизированный план – предполагает выбор сочетания уровней для каждого прогона случайным образом.
2. Латинский план («латинский квадрат») - используется в том случае, когда проводится эксперимент с одним первичным фактором и несколькими вторичными. Суть такого планирования состоит в следующем. Если первичный фактор А имеет *l* уровней, то для каждого вторичного фактора также выбирается *l* уровней. Выбор комбинации уровней факторов выполняется на основе специальной процедуры, которую мы рассмотрим на примере.

Пусть в эксперименте используется первичный фактор А и два вторичных фактора – В и С; число уровней факторов l равно 4.

Соответствующий план можно представить в виде квадратной матрицы размером l\*l(4\*4)относительно уровней фактора А. При этом матрица стоится таким образом, чтобы в каждой строке и в каждом столбце данный уровень фактора А встречался только один раз (табл. 9.1):

Таблица 9.1. Пример латинского плана

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Значение  фактора  В |  | Значение фактора С | |  |
| С1 | С2 | С3 | С4 |
| B1 | A1 | A2 | A3 | A4 |
| B2 | A2 | A3 | A4 | A1 |
| B3 | A3 | A4 | A1 | A2 |
| B4 | A4 | A1 | A2 | A3 |

В результате имеем план, требующий 4\*4 = 16 прогонов, в отличие от ПФЭ, для которого нужно 4 3 = 64 прогона.

1. Эксперимент с изменением факторов по одному.

Суть его состоит в том, что один из факторов «пробегает» все l уровней, а остальные n – 1 факторов поддерживаются постоянными. Такой план обеспечивает исследование эффектов каждого фактора в отдельности. Он требует всего N = l1+

l2+…+ ln прогонов (li – число уровней i – го фактора).

Для рассмотренного выше примера (3 фактора, имеющие по 4 уровня) N = 4+4+4=12.

Ещё раз подчеркнем, что такой план применим (как и любой ЧФЭ) только при отсутствии взаимодействия между факторами.

1. Дробный факторный эксперимент.

Каждый фактор имеет два уровня – нижний и верхний, поэтому общее число вариантов эксперимента N=2 k , k – число факторов. Матрицы планов для k = 2 и k=3 приведены ниже.

Планы, построенные по такому принципу, обладают определенными свойствами (симметричности, нормированности, ортогональности и ротабельности), обеспечивающими повышение качества проводимых экспериментов.

Таблица 9.2 Матрица плана дробного факторного эксперимента для k=2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер эксперимента | Значение факторов | |
| х1 | х2 |
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 1 |

Таблица 9.3 Матрица плана дробного факторного эксперимента для k=3

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер эксперимента | Значение факторов | |  |
| х1 | х2 | х3 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 0 |
| 8 | 1 | 1 | 1 |

**9.2.Тактическое планирование эксперимента.**

Совокупность методов установления необходимого объема испытаний относят к тактическому планированию экспериментов.

Поскольку точность оценок наблюдаемой переменной характеризуется её дисперсией, то основу тактического планирования эксперимента составляют так называемые методы понижения дисперсии.

Поскольку имитационное моделирование представляет собой статистический эксперимент, то при его проведении необходимо не только получить достоверный результат, но и обеспечить его «измерение» с заданной точностью. Т.е необходимо выбрать такой объем испытаний, при котором доверительный интервал при заданном значении доверительной вероятности не превышал требуемый.

В общем случае объем испытаний (величина выборки), необходимый для получения оценок наблюдаемой переменной с заданной точностью, зависит от следующих факторов:

· Вида распределения наблюдаемой переменной y (напомним, что при статистическом эксперименте она является случайной величиной);

· Коррелированности между собой элементов выборки;

· Наличия и длительности переходного режима функционирования моделируемой системы.

Если исследователь не обладает перечисленной информацией, то у него имеется единственный способ повышения точности оценок истинного значения наблюдаемой переменной – многократное повторение прогонов модели для каждого сочетания уровней факторов, выбранного на этапе стратегического планирования эксперимента. Такой подход получил название «формирование простой случайной выборки» (сокращенно - ПСВ). Другими словами, при использовании ПСВ каждый «пункт» стратегического плана просто выполняется повторно определенное число раз, и затем полученные результаты усредняются (вычисляются математическое ожидание и дисперсия наблюдаемой переменной). При таком подходе общее число прогонов модели, необходимое для достижения цели моделирования, равно произведению N c \*x\*N t (N c - число сочетаний уровней факторов по стратегическому плану; N t – число прогонов модели для каждого сочетания, вычисленное при тактическом планировании).

Поэтому даже при использовании ПСВ до начала испытаний необходимо определить тот минимальный объем выборки, который обеспечит требуемую точность результатов.

Рассмотрим несколько основных вариантов вычисления необходимого объема испытаний(величину N t ).

1.Если случайные значения наблюдаемой переменной не коррелированны и их распределение не изменяется от прогона к прогону, то выборочное среднее можно считать нормально распределенным.

В этом случае число прогонов N t , необходимое для того, чтобы истинное среднее y лежало в интервале y ± b c вероятностью (1 - α), определяется следующим образом:

Nt = (Z 2 \*D y )/b 2 ,где

Z – значение нормированного нормального распределения, которое определяется по справочной таблице при заданном уровне значимости a/2;

D y – дисперсия;

b – доверительный интервал.

Если требуемое значение дисперсии D y до начала эксперимента неизвестно, целесообразно выполнить пробную серию из L прогонов и вычислить на её основе выборочную дисперсию D.

2. Если наблюдаемая переменная – вектор, то оценку необходимого числа прогонов выполняют отдельно для каждой компоненты вектора. Наибольшее и полученных значений М принимают в качестве числа прогонов N t .

Основной недостаток методов планирования, основанных на использовании простой случайной выборки – медленная сходимость выборочных средних к истинным средним с ростом объема выборки N t (пропорционально значению N t 1 / 2 ). Это приводит к необходимости использования методов уменьшения ошибок, не требующих увеличения N t . Такие методы называются методами понижения дисперсии и делятся на три группы:

· Активные(предусматривают формирование выборки специальным образом);

· Пассивные(применяются после того, как выборка уже сформирована);

· Косвенные( в которых для получения оценок наблюдаемой переменной используются значения некоторых величин).

Активных методов понижения дисперсии известно достаточно много. Выбор конкретного метода определяется, как правило, спецификой модели и целями эксперимента. Рассмотрим те из них, которые направлены на снижение влияния переходного периода.. Выбор объясняется тем, что наличие и длительность переходного режима оказывает существенное влияние на качество результатов моделирования (в смысле точности). Вместе с тем, большинство ИМ используется для изучения функционирования системы в установившемся режиме.

Существует три основных метода уменьшения ошибок, обусловленных наличием переходного периода:

1. Значительное увеличение длительности прогона.
2. Исключение и рассмотрения переходного периода
3. Инициализация модели при некоторых специально выбранных начальных условиях.

На практике снижения влияния переходного периода обычно добиваются одним из следующих способов:

· Методом повторений

· Методом подинтервалов

· Методом циклов

Метод повторения

При использовании этого метода каждое наблюдение получается при помощи отдельного прогона модели, причем все прогоны начинаются при одних и тех же начальных условиях, но используются различные последовательности случайных чисел

Преимуществом метода является статистическая независимость получаемых наблюдений. Недостаток состоит в том, что наблюдения могут оказаться сильно смещенными под влиянием начальных условий.

Метод подинтервалов

Данный метод основан на разбиении каждого прогона модели на равные промежутки времени. Начало каждого интервала совпадает с началом очередного этапа наблюдений.

Достоинство метода состоит в том, что влияние переходных условий со временем уменьшается и наблюдение точнее отражает поведении системы в стационарном режиме. Недостаток в том, что значения наблюдаемых переменных, полученных в начале очередного интервала, зависят от конечных условий предыдущего интервала (т.е. между интервалами существует автокорреляция).

Метод циклов

При использовании метода циклов влияние автокорреляции уменьшается за счет выбора интервалов таким образом, чтобы в их начальных точках условия были одинаковыми. Например, в качестве таких условий можно рассматривать длину очереди заявок на обслуживание. В этом случае удобно выбрать начало очередного интервала совпадающим с моментом, когда длина очереди становится равной нулю. Недостатком метода является меньшее по сравнению с методом подинтервалов число получаемых наблюдений.

**Пассивные методы** влияют на подготовку и проведение эксперимента, но реализуются на этапе обработки и анализа результатов моделирования. Их довольно много; рассмотрим наиболее простой и распространенный – метод стратифицированной выборки.

Суть метода состоит в следующем.

Выборка разделяется на части, называемые слоями (стратами). При этом необходимо, чтобы значения элементов выборки как можно меньше различались внутри одного слоя и как можно больше – между различными слоями. Внутри каждого слоя производят случайный отбор элементов и вычисляют среднее значение слоя yi. Полученные оценки используют для вычисления математического ожидания по выборке в целом:

y = (∑N i y i ) / N

где N, N i – объем всей выборки и i-го слоя соответственно. Если считать, что оценки y i независимы, то дисперсия по выборке и в целом равна:

D y = (∑N i D i ) / N

где Dy i - дисперсия для i-го слоя.

При удачном выборе слоев величины D i будут малы, а значит, и выборочная дисперсия D y будет предпочтительнее, чем для оценки, полученной методами простой случайной выборки.

Косвенные методы понижения дисперсии основаны на том, что зачастую некоторые из выходных характеристик можно получить (вычислить) легче, чем другие. Их использование предполагает не только весьма глубокое знание сущности процессов, протекающих в системе, но и наличие формального описания взаимной зависимости параметров модели. **(С)**

# ОБРАБОТКА И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

**10. ОБРАБОТКА И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Решения, принимаемые исследователем по результатам имитационного моделировании, могут быть конструктивными только при выполнении двух основных условий:

· полученные результаты обладают требуемой точностью и достоверностью;

· исследователь способен правильно интерпретировать полученные результаты.

Возможность выполнения первого условия закладывается, в основном, еще на этапе разработки модели и частично – на этапе планирования эксперимента. Достоверность результатов моделирования предполагает, что модель, с помощью которой они получены, не только является «правильной», но и отвечает и некоторым дополнительным требованиям, предъявляемым к имитационным моделям. Эти требования и методы оценки соответствия их созданной модели рассматриваются ниже.

Способность исследователя правильно интерпретировать полученные результаты и принимать на их основе важные решения существенно зависит от степени соответствия формы представления результатов целям моделирования.

Если разработчик модели уверен, что полученные результаты будут использоваться в соответствии с одной, четко определенной целью, форма их представления может быть определена заранее. В этом случае преобразование экспериментальных данных к требуемому виду может производиться либо в ходе эксперимента, либо сразу после его завершения.

Если же заранее конкретизировать цель моделирования сложно или целей несколько, данные должны накапливаться в базе данных и затем уже выдаваться в требуемой форме по запросу пользователя. Как правило, по такому принципу строятся системы автоматизации моделирования.

При правильной организации обработки экспериментальных данных могут быть получены дополнительные сведения о моделируемой системе.

**10.1 Оценка качества имитационной модели**

Оценка качества модели является завершающим этапом ее разработки и преследует две цели:

· проверить соответствие модели ее предназначению (целям исследования);

· оценить достоверность и статистические характеристики результатов, получаемых при проведении модельных экспериментов.

При аналитическом моделировании достоверность результатов определяется двумя основными факторами:

· корректным выбором математического аппарата, используемого для описания исследуемой системы;

· методической ошибкой, присущей данному математическому методу.

При имитационном моделировании на достоверность результатов влияет целый ряд дополнительных факторов, основными из которых являются:

· моделирование случайных факторов, основанное на использовании датчиков СЧ (случайных числе), которые могут вносить «искажения» в поведение модели;

· наличие нестационарного режима работы модели;

· использование нескольких разнотипных математических методов в рамках одной модели;

· зависимость результатов моделирования от плана экспериментов;

· необходимость синхронизации работы отдельных компонентов модели;

· наличие модели рабочей нагрузки, качество которой зависит, в свою очередь, от тех же факторов.

Пригодность имитационной модели для решения задач исследования характеризуется тем, в какой степени она обладает так называемыми целевыми свойствами. Основными из них являются:

· адекватность;

· устойчивость;

· чувствительность.

Ниже рассмотрены некоторые способы проведения оценки модели по каждому из них.

**10.1.1. Оценка адекватности модели.**

В обще случае под адекватностью понимают степень соответствия модели тому реальному явлению или объекту, для описания которого она строится.

Вместе с тем, создаваемая модель ориентирована, как правило, на исследование определенного подмножества свойств этого объекта. Поэтому можно считать, что адекватность модели определяется степенью ее соответствия не столько реальному объекту, сколько целям исследования. В наибольшей степени это утверждение справедливо относительно моделей проектируемых систем (т.е. в ситуациях, когда реальная система вообще не существует).

Тем не менее, во многих случаях полезно иметь формальное подтверждение (или обоснование) адекватности разработанной модели. Один из наиболее распространенных способов такого обоснования - использование методов математической статистики. Суть этих методов заключается в проверке выдвинутой гипотезы (в данном случае - об адекватности модели) на основе некоторых статистических критериев.

Замечание: при проверке гипотез методами математической статистики необходимо иметь в виду, что статистические критерии не могут доказать ни одной гипотезы: они могут лишь указать на отсутствие опровержения.

Процедура оценки основана на сравнении измерений на реальной системе и результатов экспериментов на модели и может проводиться различными способами.

Наиболее распространенные из них:

· по средним значениям откликов модели и системы;

· по дисперсиям отклонений откликов модели от среднего значения откликов системы;

· по максимальному значению относительных отклонений откликов модели от откликов системы.

Названные способы оценки достаточно близки по сути, поэтому ограничимся рассмотрением первого из них.

При этом способе проверяется гипотеза о близости среднего значения наблюдаемой переменной У среднему значению отклика реальной системы Y\*.

В результате No опытов на реальной системе получают выборку Y\*. Выполнив NM экспериментов на модели, также получают множество значений наблюдаемой переменной Y.

Затем вычисляются оценки математического ожидания и дисперсии откликов модели и системы, после чего выдвигается гипотеза о близости средних значений величин У\* и У (в статистическом смысле). Основой для проверки гипотезы является t-статистика (распределение Стьюдента). Ее значение, вычисленное по результатам испытаний, сравнивается с критическим значением £кр, взятым из справочной таблицы. Если выполняется неравенство t < £кр, то гипотеза принимается.

Необходимо еще раз подчеркнуть, что статистические методы применимы только в том случае, если оценивается адекватность модели в существующей системе. На проектируемой системе провести измерения, естественно, не представляется возможным. Единственный способ преодолеть это препятствие заключается в том, чтобы принять в качестве эталонного объекта концептуальную модель проектируемой системы. *(Тогда сравниваем программную реализацию с концептуальной моделью).* Тогда оценка адекватности программно реализованной модели заключается в проверке того, насколько корректно она отражает концептуальную модель. Данная проблема сходна с проверкой корректности любой компьютерной программы, и ее можно решать соответствующими методами, например с помощью тестирования.

**10.1.2. Оценка устойчивости модели.**

При оценке адекватности модели как существующей, так и проектируемой системе реально может быть использовано лишь ограниченное подмножество всех возможных значений входных параметров (рабочей нагрузки и внешней среды). В связи с этим для обоснования достоверности получаемых результатов моделирования большое значение имеет проверка устойчивости модели. В теории моделирования это понятие трактуется следующим образом.

Устойчивость модели — это ее способность сохранять адекватность при исследовании эффективности системы на всем возможном диапазоне рабочей нагрузки, а также при внесении изменений в конфигурацию системы.

Универсальной процедуры проверки устойчивости модели не существует. Разработчик вынужден прибегать к частичным тестам и здравому смыслу. Часто бывает полезна апостериорная проверка. Она состоит в сравнении результатов моделирования и результатов измерений на системе после внесения в нее изменений. Если результаты моделирования приемлемы, уверенность в устойчивости модели возрастает.

В общем случае можно утверждать, что чем ближе структура модели структуре системы и чем выше степень детализации, тем устойчивее модель.

Устойчивость результатов моделирования может быть также оценена методами математической статистики. Здесь уместно вспомнить основную задачу математической статистики. В данном случае устойчивость результатов моделирования можно рассматривать как признак, подлежащий оценке. Для проверки гипотезы об устойчивости результатов может быть использован критерий Уилкоксона.

Критерий Уилкоксона служит для проверки того, относятся ли две выборки к одной и той же генеральной совокупности (т. е. обладают ли они одним и тем же статистическим признаком). Например, в двух партиях некоторой продукции измеряется определенный признак, и требуется проверить гипотезу о том, что этот признак имеет в обеих партиях одинаковое распределение; другими словами, необходимо убедиться, что технологический процесс от партии к партии изменяется несущественно.

При статистической оценке устойчивости модели соответствующая гипотеза может быть сформулирована следующим образом: при изменении входной (рабочей) нагрузки или структуры ИМ закон распределения результатов моделирования остается неизменным.

Проверку указанной гипотезы Н проводят при следующих исходных данных:

· есть две выборки X = (х1 ..., хn) и Y = (у1 ..., уm), полученные для различных значений рабочей нагрузки; относительно законов распределения X и Y никаких предположений не делается.

· значения обеих выборок упорядочиваются вместе по возрастанию. Затем анализируется взаимное расположение xi и yj В случае уj < xi говорят, что пара значений (xi yj) образует инверсию.

(Например, пусть для n = m = 3. После упорядочивания получилась такая последовательность значений: у1 х1 у3, х2, у2, х3. Тогда имеем инверсии: (х1, у1), (х2, у1), (х2, у3), (х3, у1), (х3, у2), (х3, у3)).

· подсчитывают полное число инверсий U. Если гипотеза верна, то U должно сильно отклоняться от своего математического ожидания М:

М=(п\* т)/2

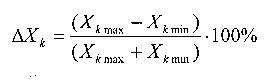
От гипотезы отказываются, если | U - M | > UKP (UKP определяют по таблице для заданного уровня значимости).

**10.1.3. Оценка чувствительности ИМ.**

Очевидно, что устойчивость является положительным свойством модели. Однако если изменение входных воздействий или параметров модели (в некотором заданном диапазоне) не отражается на значениях выходных параметров, то польза от такой модели невелика (ее можно назвать «бесчувственной»). В связи с этим возникает задача оценивания чувствительности модели к изменению параметров рабочей нагрузки и внутренних параметров самой системы.

Такую оценку проводят по каждому параметру Хk в отдельности. Основана она на том, что обычно диапазон возможных изменений параметра известен. Одна из наиболее простых и распространенных процедур оценивания состоит в следующем.

1. вычисляется величина относительного среднего приращения параметра Хk: *(Верх должен быть умножен на 2???)*



1. проводится пара модельных экспериментов при значениях *Xk= Xk max*и *Xk=Xk min* и средних фиксированных значениях остальных параметров. Определяются значения отклика модели *Y1 = f ( Xk max )*, *Y2 = f ( Xk min )*.

3)вычисляется ее относительное приращение наблюдаемой переменной У: *(Верх должен быть умножен на 2???)*

Изображение выглядит как текст, часы

Автоматически созданное описание

В результате для k-го параметра модели имеют пару значений (∆Хк, ∆Ук) (∆ *или D*), характеризующую чувствительность модели по этому параметру.

Аналогично формируются пары для остальных параметров модели, которые образуют множество пар {∆Хк,∆Ук}.

Данные, полученные при оценке чувствительности модели, могут быть использованы, в частности, при планировании экспериментов: большее внимание должно уделяться тем параметрам, по которым модель является более чувствительной.

**10.1.4. Калибровка модели.**

Если в результате проведенной оценки качества модели оказалось, что ее целевые свойства не удовлетворяют разработчика, необходимо выполнить ее калибровку, т. е. коррекцию с целью приведения в соответствие предъявляемым требованиям.

Как правило, процесс калибровки носит итеративный характер и состоит из трех основных этапов:

· глобальные изменения модели (например, введение новых процессов, изменение типов событий и т. д.);

· локальные изменения (в частности, изменение некоторых законов распределения моделируемых случайных величин);

· изменение специальных параметров, называемых калибровочными.

Целесообразно объединить оценку целевых свойств ИМ и ее калибровку в единый процесс. Именно такая стратегия принята в статистическом методе калибровки, описанном ниже.

Процедура калибровки состоит из трех шагов, каждый из которых является итеративным (рис. 2.13).

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рис 10.1. Схема процесса калибровки ИМ

**Шаг** 1. Сравнение выходных распределений.

Цель - оценка адекватности ИМ. Критерии сравнения могут быть различны. В частности, может использоваться величина разности между средними значениями откликов модели и системы.

Устранение различий на этом шаге основано на внесении глобальных изменений.

**Шаг** 2. Балансировка модели.

Основная задача - оценка устойчивости и чувствительности модели. По его результатам, как правило, производятся локальные изменения (но возможны и глобальные).

Шаг 3. **Оптимизация модели.**

Цель этого этапа — обеспечение требуемой точности результатов. Здесь возможны три основных направления работ:

· дополнительная проверка качества датчиков СЧ *(случайных чисел)*;

· снижение влияния переходного режима;

· применение специальных методов понижения дисперсии.

**10.2. Подбор параметров распределений**

В некоторых случаях имитационная модель сложной системы может быть реализована в виде набора отдельных моделей ее подсистем. При проведении экспериментов с такой моделью в целях сокращения затрат времени бывает необходимо заменять моделирование работы одной из подсистем некоторым числовым параметром (вспомните принцип параметризации), либо случайной величиной, распределенной по заданному закону. Чтобы такая замена была выполнена корректно, исследователь должен располагать описанием зависимости данного числового параметра от времени и других факторов, фигурирующих в модели.

При имитационном моделировании подбор законов распределений выполняется на основе статистических данных, полученных в ходе эксперимента .

В основе процедуры отыскания закона распределения некоторой величины по экспериментальным данным лежит проверка статистических гипотез.

Статистическая гипотеза — это утверждение относительно значений одного или боле параметров распределения некоторой величины или о самой форме распределения.

Обычно выбирают две исходные гипотезы: основную—Н0 и альтернативную ей – H1

Статистическая проверка гипотезы - это процедура выяснения, следует ли принял основную гипотезу Н 0 или отвергнуть ее.

Если в результате проверки гипотеза Н 0 ошибочно отвергается, то имеет место ошибка 1-го рода (характеризующаяся более тяжелыми последствиями); если гипотеза Н0 принимается при истинности H1 — это ошибка второго рода.

Вероятности ошибок I и II рода (α и β) зависят от критерия, на основание которого будет выбираться одна из гипотез. Очевидно, что вероятности этих двух ошибок взаимосвязаны, то есть чем больше значение α, тем меньше β и наоборот.

Обычное решение этой дилеммы состоит в том, что выбирают некоторое фиксированное значение α (как правило 0.05, 0.01, 0.001) и надеются, что β будет также мало. Фиксированное значение а называется **уровнем значимости.**

Для выбранного значения α определяется так называемая критическая область В, удовлетворяющая условию



где Z— контрольная величина (критерий), представляющая собой некоторую

функцию от выборки (результатов эксперимента).

Проверка гипотезы состоит в следующем. Производится выборка (проводится эксперимент), на основании чего вычисляется z — частное значение критерия Z.

Если , то от гипотезы Н 0 отказываются. Если z не лежит в В, то говорят, что полученные наблюдения **не противоречат принятой гипотезе.**

Для наиболее часто используемых статистических гипотез разработаны критерии, позволяющие проводить их проверку с наибольшей достоверностью. Рассмотрим основные из них.

**t-критерий** служит для проверки гипотезы о равенстве средних значений двух

нормально распределенных СВ (X и Y) в предположении, что дисперсии их равны (хотя и неизвестны). Сравниваемые выборки могут иметь разный объем.

В качестве критерия используют величину

Величина Т подчиняется t-распределению Стьюдента.

Критическое значение для t-критерия определяется по таблице для выбранного значения α и числа степеней свободы k = n1+n2-2.

Если вычисленное значение Т превышает tкр, найденное по таблице, то гипотезу Н0 отвергают.

По отношению к предположению о «нормальной распределенности» величин x и у t-критерий не очень чувствителен. Его можно применять, если распределения СВ не имеют нескольких вершин и не слишком асимметричны.

**F-критерий** служит для проверки гипотезы о равенстве дисперсий Dx и Dy при условии, что x и у распределены нормально.

Гипотезы такого рода имеют большое значение в технике, так как дисперсия есть мера таких характеристик, как погрешности измерительных приборов, точность технологических процессов, точность наведения при стрельбе и так далее.

В качестве контрольной величины используется отношение дисперсий F= Dx / Dy (или Dy / Dx - большая дисперсия должна быть в числителе).

Величина F подчиняется F-распределению (Фишера ) с (m1, m2) степенями свободы (m1=n1-1, m2=n2 - l). Проверка гипотезы состоит в следующем. <https://bstudy.net/664997/informatika/raspredelenie_fishera>

Для величины γ = α/2 и величин m1 m2 по таблице F-распределения выбирают

значения Fγ,m1,m2. Если статистика F\*, вычисленная по выборке, больше этого критического значения, гипотеза должна быть отклонена с вероятностью ошибки α.

Критерии согласия — это критерии, с помощью которых проверяют, удовлетворяет ли рассматриваемая СВ данному закону распределения.

Критерий согласия Пирсона **(формула)** и Критерий Колмогорова — Смирнова были подробно рассмотрены в курсе ТВиМС.

<https://bstudy.net/664998/informatika/kriteriy_pirsona_kvadrat> (Пирсона)

<https://bstudy.net/664999/informatika/kriteriy_kolmogorova> (Колмогорова)

**10.3. Оценка влияния и взаимосвязи факторов**

Как правило, количественная оценка степени влияния того или иного фактора на значения наблюдаемой переменной (показателя эффективности) вызывает значительную сложность, особенно при наличии взаимного влияния факторов. Наиболее простой и доступный способ решения этой проблемы состоит в использовании результатов оценки чувствительности модели.

Однако эти результаты сложно представить в форме аналитической зависимости. Такое представление может оказаться весьма полезным для многих практических задач, связанных как с разработкой моделей (речь опять-таки идет о принципе параметризации), так и непосредственно с принятием решений по экспериментальным данным.

Отыскание аналитических зависимостей, связывающих между собой различные параметры, фигурирующие в модели, может быть основано на совместном использовании группы методов математической статистики: дисперсионного, корреляционного и регрессионного анализа. Подробному и строгому описанию соответствующих процедур посвящено огромное количество книг учебного, научного и справочного характера. Поэтому основная цель изложения последующего материала сводится к тому, чтобы показать роль и место указанных методов при проведении анализа данных, полученных в ходе имитационного эксперимента.

**10.3.1. Однофакторный дисперсионный анализ**

Его суть сводится к определению влияния на результат моделирования одного выбранного фактора.

Пусть, например, исследователя интересует средняя интенсивность отказов компьютера, и в созданной им модели учтены следующие факторы: интенсивность поступления заданий пользователей, интенсивность обращений в оперативную память, временные характеристики решаемых задач и интенсивность обращений к жесткому диску. Если предварительные данные говорят о том, что основной причиной отказов является ненадежная работа жесткого диска, то в качестве анализируемого фактора целесообразно выбрать интенсивность обращений к нему. Задача факторного анализа в данном случае состоит в том, чтобы оценить влияние указанного фактора на среднее число отказов.

Формально постановка задачи однофакторного дисперсионного анализа состоит в следующем. Пусть интересующий нас фактор х имеет 1 уровней. Для каждого из них получена выборка значений наблюдаемой переменной у: уj(1), уj(2), ... yj(l), j=l,...,n, n — объем выборки (число наблюдений).

Необходимо проверить гипотезу Н 0 о равенстве средних значений выборок (т.е.

о независимости значений у от значений исследуемого фактора x). Уравнение однофакторного дисперсионного анализа имеет вид:

yij = m+ai+eij, где

yij - j-e значение у в i-й серии опытов,

m – генеральное среднее случайной величины у,

а. - неизвестный параметр, отражающий влияние фактора х («эффект» i-гo

значения фактора х),

eij - ошибка измерения у.

Для проверки гипотезы Н 0 используют F-критерий и переходят от проверки значимости различий средних к проверке значимости различий двух дисперсий:

·генеральной (обусловленной погрешностями измерений) - D0;

·факторной (обусловленной изменением фактора х) - Dx.

Значение F-критерия вычисляется как отношение Dx / Do или Do / Dx (в числителе должна стоять большая из дисперсий); затем но по таблице Fраспределений находят его критическое значение fкр для заданного уровня значимости и числа степеней свободы.

Если F > Ркр, то гипотезу Н 0 отвергают, т. е. различия являются значимыми (фактор x влияет на значения у).

**10.3.2. Многофакторный дисперсионный анализ**

Многофакторный дисперсионный анализ (МДА) позволяет оценивать влияние на наблюдаемую переменную уже не одного, а произвольного числа факторов. Точнее, МДА позволяет выбрать ив группы факторов, участвующих в эксперименте, те, которые действительно влияют на его результат.

Методику проведения многофакторного дисперсионного анализа рассмотрим применительно к частичному факторному эксперименту, проводимому в соответствии с латинским планом.

Пусть в эксперименте рассматриваются один первичный фактор и два вторичных, каждый из которых имеет n уровней (т. е. объем испытаний N = n2).

Обозначим через yijk результат эксперимента при условии, что фактор **а** находился на уровне i, фактор **b** - на уровне j, фактор **с** - на уровне к. Множество значений, которые может принимать упорядоченная тройка (i, j, к), обозначим через

L.

В этом случае уравнение дисперсионного анализа выглядит следующим образом:

yijk =m+ai+bj+gk+eijk,

где m - генеральное среднее случайной величины у, ai, bj, gk - неизвестные параметры («эффекты» соответствующих факторов).

Решение задачи дисперсионного анализа заключается в проверке гипотез о независимости результатов измерений от факторов **a, b, c**:

Ha: ai=0, i=1, …, n;

Hb: bj=0, j=1, …, n;

Hc: ck=0, k=1,…, n;

Для этого по методу наименьших квадратов (МНК) находят оценки параметров m, ai, bj, gk, минимизируя по указанным переменным (поочередно) функцию

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Затем по каждому фактору вычисляется f-статистика. Величина F есть мера потерь при принятии гипотезы H0. Чем больше F, тем хуже модель, отвергающая влияние соответствующего фактора. Таким образом, если вычисленное значение F больше Fкр, найденного по таблице для некоторого уровня значимости, то гипотеза отвергается.

Необходимо отметить, что дисперсионный анализ может использоваться для оценки влияния факторов, имеющих как количественный характер, так и качественный, поскольку в уравнении дисперсионного анализа фигурируют не сами факторы, а только их «эффекты».

В том случае, если все факторы носят количественный характер, взаимосвязь между ними и наблюдаемой переменной может быть описана с помощью уравнения регрессии.

**10.3.3. Корреляционный и регрессионный анализ.**

Это два близких метода, которые обычно используются совместно для исследования взаимосвязи между двумя или более непрерывными переменными.

Методы корреляционного анализа позволяют делать статистические выводы о степени зависимости между переменными.

Величина линейной зависимости между двумя переменными измеряется посредством простого коэффициента корреляции, величина зависимости от нескольких - посредством множественного коэффициента корреляции.

В корреляционном анализе используется также понятие частного коэффициента корреляции, который измеряет линейную взаимосвязь между двумя переменными без учета влияния других переменных.

Если корреляционный анализ позволил установить наличие линейной зависимости наблюдаемой переменной от одной или более независимых, то форма зависимости может быть уточнена методами регрессионного анализа.

Для этого строится так называемое уравнение регрессии, которое связывает зависимую переменную с независимыми и содержит неизвестные параметры. Если уравнение линейно относительно параметров (но необязательно линейно относительно независимых переменных), то говорят о линейной регрессии, в противном случае регрессия нелинейна(*нелинейная*).

Рассмотрим простой корреляционный анализ, т. е. метод определения взаимосвязи между двумя переменными.

Обозначим их x и у. Независимо от способа получения выборки имеются два предварительных шага для определения существования и степени линейной зависимости между x и у. Первый шаг заключается в графическом отображении точек (xi уi) на плоскости (х, у) — т. е. в построении диаграммы рассеяния*(диаграмма рассеяния).* Анализируя диаграмму рассеяния, можно решить, допустимо ли предположение о линейной зависимости между x и у (см.рис.10.2).

Если rxy не равен нулю, то на втором шаге вычисляется его точное значение.

Чем больше по абсолютному значению rxy, тем сильнее линейная зависимость между переменными. При r =1 имеет место функциональная линейная зависимость между x и у вида у=ах+b, причем если г положительно, то говорят о положительной корреляции, т.е. большие значения одной величины соответствуют большим значениям другой; при r = -1 имеет место отрицательная корреляция; при 0 < r < 1 вероятна либо линейная корреляция с рассеянием (рис.10.2, в), либо нелинейная корреляция (рис.10.2, г).

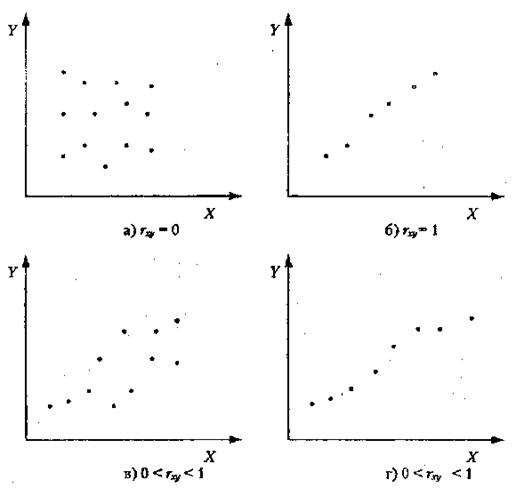


Рис. 10.2. Графическое отображении корреляции переменных

При анализе результатов ИМ *(имитационной модели)* необходимо иметь в виду, что если даже удалось установить тесную зависимость между двумя переменными, это еще не является прямым доказательством их причинно-следственной связи. Возможно, имеет место стохастическая зависимость, обусловленная, например, коррелированностью последовательностей псевдослучайных чисел, используемых в имитационной модели.

Поэтому результаты корреляционного анализа целесообразно уточнить, проведя регрессионный анализ.

Регрессионный анализ позволяет решать две задачи:

1. устанавливать наличие возможной причинной связи между переменными;
2. предсказывать значения зависимой переменной по значениям независимых переменных. Эта возможность особенно важна в тех случаях, когда прямые измерения зависимой переменной затруднены.

Если предполагается линейная зависимость между x и y, то она может быть описана уравнением вида yi=b0+b1x+ei, которое называется простой линейной регрессией y по оси x.

Величины b0 и b1 являются неизвестными параметрами, а еi — случайные ошибки испытаний.

Цель регрессионного анализа — найти наилучшие в статистическом смысле оценки параметров b0 и bi (величину bi обычно называют коэффициентом регрессии).

Разница между наблюдаемым и оцененным значением у при х = xi называется отклонением (или остатком). Величины отклонений могут быть использованы для проверки адекватности полученной модели. Для этого строится график отклонений d = f(y) или d=f(x) (см. рис.10.2), и по его виду делается предварительное заключение о степени адекватности регрессионной модели.

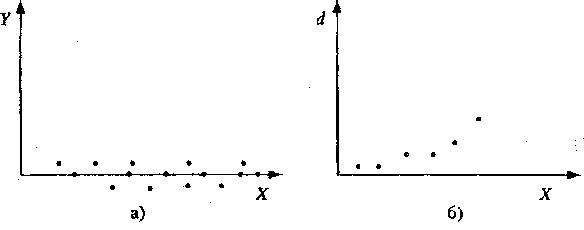


Рис. 10.3 Графическое представление функций отклонений: а – модель адекватна; б – необходимо введение дополнительной независимой переменной.

В случае нескольких независимых переменных имеет место **множественная линейная регрессия**:

y=b0+b1x1+b2x2+ ...+bkxk+e.

В этом случае для отыскания оценок bi также используется метод наименьших квадратов.

В случае нелинейной регрессии основой для построения регрессионной модели опять-таки является МНК. Однако в этом случае для отыскания оценок b строится система нелинейных уравнений (относительно bi), а для ее решения используются различные итерационные методы.

# ПРИМЕРЫ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

**Тема 11. ПРИМЕРЫ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ**

**11.1 Общие сведения**

Имитационное моделирование в реальном масштабе времени физических сигналов и процессов, адекватных сигналам радиотехнических систем, является эффективным средством решения задач автоматизации исследований, испытаний, моделирования и диагностики сложных систем.

Предлагаемая комплексная имитационно-моделирующая установка для испытаний радиотехнических систем (КИМУ РТС) представляет собой комплекс аппаратных и программных средств, действующих в виде единой системы и позволяющих автоматизировать процессы исследований, полунатурного моделирования, контроля работоспособности и настройки радиоэлектронных систем и устройств различных видов, организовывать тренировки личного состава, обслуживающего системы.

Основное назначение КИМУ РТС – формирование в лабораторных, заводских, полевых и других условиях сигналов и процессов, адекватных по своей физической природе и характеристикам сигналам и процессам, возникающим в исследуемой аппаратуре в условиях реальной эксплуатации. Следует отметить, что в КИМУ РТС программными методами имитируются условия (среда) функционирования и, например, приемные средства исследуемых радиотехнических систем; аппаратная же часть предназначена для генерирования физических сигналов и процессов с программно-управляемыми вероятностными, корреляционными, спектральными и временными характеристиками, адекватных сигналам и процессам, возникающим в устройствах исследуемых радиотехнических систем на видео, промежуточных и рабочих частотах – см. рис. 1.

**11.2. Основные принципы организации программного обеспечения**

Программное обеспечение (ПО) КИМУ РТС, ориентированной на работу в масштабе реального времени и предназначенной для генерирования сложных физических сигналов и процессов, обладает следующими свойствами:

* **открытостью**, обеспечивающей возможность расширения функциональных возможностей системы за счет включения в состав ПО дополнительных программных модулей;
* **надежностью**, обеспечиваемой средствами тестирования программных и аппаратных модулей системы, защитой от ввода некорректных данных, многократной проверкой используемых данных на различных этапах решения задачи;
* **простотой эксплуатации и настройки**, что обеспечивается удобным пользовательским интерфейсом, практически полным отказом от специальных регулировок и предварительных настроек технических и программных средств системы;
* **гибкостью**, обеспечивающей возможность изменения круга решаемых системой задач и включения в состав системы дополнительных аппаратных и программных модулей, а также возможность сохранения работоспособности системы при изменении номенклатуры устройств.

Для реализации указанных свойств программное обеспечение КИМУ РТС обеспечивает поддержку функционирования системы на различных уровнях.

Программы первого уровня предназначены для описания факторов, учитываемых при решении общей задачи. Такими факторами являются характеристики среды функционирования РЛС, погодные условия, характеристики исследуемых объектов, свойства объектов, участвующих в эксперименте (пассивные и активные) и т.д. Программы этого уровня реализуются, как правило, в виде диалоговых окон, позволяющих вводить информацию о характеристиках объектов, создавать библиотеки объектов и факторов, из которых затем формируются условия окружающей среды.

Программы второго уровня предназначены для моделирования среды функционирования исследуемых средств с учетом всех известных факторов. Эти программы позволяют выбирать условия проведения испытаний, технические средства, используемые в эксперименте, указывать наличие динамически изменяемых объектов, задавать траектории их движения и т.д. Результатом выполнения программ этого уровня являются данные, описывающие характеристики факторов, влияющих на параметры формируемого процесса и сценарии изменения этих факторов. Программы этого уровня реализуют алгоритмы моделирования климатических и погодных условий, маршрутов движения динамических объектов, свойств рельефа и т.д.

Программы первого и второго уровней, ориентированные на описание внешней среды функционирования испытуемых средств, реализуют алгоритмы, не связанные непосредственно ни с исследуемыми процессами, ни с аппаратной частью системы. Программы этого уровня могут найти применение в системах моделирования различного назначения, а могут быть использованы и как законченный программный продукт.

Программы третьего уровня предназначены для расчета характеристик воспроизводимых процессов с учетом всех известных факторов. Программы этого уровня реализуют математические модели, позволяющие определить вид и характеристики имитируемых процессов.

Программы четвертого и пятого уровней осуществляют управление аппаратной частью системы при формировании физических сигналов. Программы четвертого уровня формируют массивы управляющих кодов, необходимых для настройки аппаратной части системы на воспроизведение требуемых физических процессов. Алгоритмы программ этого уровня определяются методами, используемыми при создании устройств генерирования физических сигналов, и принципами функционирования этих устройств. Программы пятого уровня предназначены собственно для управления аппаратной частью системы и осуществляют передачу данных таким образом, чтобы обеспечить формирование физического процесса с характеристиками, адекватными реальным.

Программное обеспечение КИМУ РТС имеет **агрегатируемую** структуру и представляет собой набор программных модулей, каждый из которых предназначен для решения задачи определенного уровня. Программы различных уровней совместимы на уровне данных, что позволяет заменять отдельные программные модули системы, не внося изменений в программы других уровней, что обеспечивает возможность адаптировать уже имеющиеся программные средства к широкому кругу решаемых задач.

Дадим краткую характеристику используемым программным модулям.

**11.2.1 Программы ввода данных**

Блок ввода данных (программный модуль задания карты местности, программный модуль библиотек радиотехнических средств и программный модуль библиотек компонентов электромагнитной обстановки) обеспечивает ввод, хранение, редактирование и отображение параметров, определяющих вид и характеристики имитируемых сигналов.

Ввод и редактирование данных осуществляется пользователем с помощью блоков диалога с использованием принятых процедур ввода, записи, считывания, анализа корректности введенных значений. Введенные пользователем данные образуют библиотеки данных объектов, которые могут использоваться многократно. Таким образом, пользователь может один раз выполнить операцию ввода данных и пользоваться ими длительное время, обновляя данные только по мере необходимости, при введении в модель новых объектов.

**11.2.2 Программы имитационного моделирования параметров динамических объектов**

Программы моделирования параметров динамических объектов обеспечивают ввод, хранение и редактирование данных, определяющих маршруты воздушных, наземных и надводных объектов. Маршрут задается пользователем путем указания поворотных точек маршрута (точки изменения направления движения), для которых определяется местоположение в пространстве и скорость движения. Особенностью этих программ является то, что задаваемый маршрут связан с конкретным типом воздушного или наземного объекта, и при расчете траектории учитываются его технические характеристики. Это позволяет исключить задание технически нереализуемых маршрутов объектов.

**11.2.3 Программы имитационного моделирования электромагнитной обстановки**

Программы имитационного моделирования электромагнитной обстановки являются одним из основных продуктов программного комплекса и обеспечивают ввод, хранение, редактирование и отображение данных, определяющих условия проведения эксперимента (взаимное расположение стационарных объектов, сценарий изменения воздушной и наземной обстановки, атмосферные условия, выбор рельефа местности и т.д.). В режиме создания новой моделируемой обстановки пользователь должен из имеющихся данных указать следующие характеристики среды:

* рельеф поверхности;
* климатические и погодные условия;
* местоположение и характеристики средств излучений;
* типы стационарных объектов и их расположение;
* тип исследуемого радиотехнического средства, способ его базирования, местоположение или маршрут движения;
* маршруты движения воздушных, наземных, надводных объектов.

Данные, определяющие условия моделирования, сохраняются и могут быть в дальнейшем изменены. Программы рассматриваемого блока предназначены также для расчета взаимного расположения объектов на каждом шаге модельного времени. Данные о взаимном расположении объектов на каждом шаге модельного времени передаются программам блока расчета параметров воспроизводимых воздействий.

**11.2.4. Программы имитационного моделирования радиотехнических средств**

Эти программы реализуют алгоритмы, позволяющие получать на каждый шаг модельного времени значения параметров воздействий, имитируемых аппаратной частью системы. Тип воспроизводимых воздействий определяется исследуемыми радиотехническими средствами.

Параметры и реализации имитируемых процессов рассчитываются с учетом следующих факторов:

* характеристик исследуемого радиотехнического средства, координат и параметров его движения;
* типа наблюдаемого объекта, его текущих координат, параметров движения (с учетом случайной составляющей движения);
* свойств рельефа местности (определение зон видимости, характеристик движения наземных объектов);
* состояния атмосферы;
* климатических условий;
* свойств подстилающей поверхности;
* характеристик источников излучений;
* характеристик источников активных помех.

**11.2.5. Программный модуль управления имитационным моделированием сигналов радиотехнических средств**

Программы этого модуля можно разделить на следующие блоки:

* блок расчета настроечной информации;
* блок управления аппаратной частью системы.

Программы блока расчета настроечной информации осуществляют преобразования значений параметров имитируемых воздействий в настроечные коды, передаваемые в аппаратную часть системы и обеспечивающие воспроизведение воздействий с требуемыми характеристиками. Алгоритмы, реализуемые блоком расчета настроечной информации, учитывают специфику аппаратной части системы. В качестве выходных данных формируется массив команд, соответствующий требованиям аппаратной части системы.

Программы блока управления аппаратной частью системы обеспечивают управление техническими средствами системы с целью обеспечения генерирования физических сигналов в масштабе реального времени. Программы блока управления аппаратной частью системы взаимодействуют с аппаратурой либо посредством вызовов функций драйвера, либо прямым чтением/записью в порты. Этой частью программного обеспечения выполняются следующие операции:

* загрузка рассчитанной настроечной информацией с учетом особенностей функционирования аппаратной части системы;
* выполнение пуска/останова аппаратной части системы;
* проверка работоспособности аппаратной части системы;
* управление выполнением команд в ходе моделирования сигналов.

Вcе программы данного блока реализованы с учетом функционирования КИМУ РТС и других систем в реальном масштабе времени.

**10.3. Эффективность применения системы**  Предлагаемая система должна обеспечить:

* задание географических, климатических, погодных условий функционирования исследуемых радиолокационных и других средств;
* задание факторов, определяющих вид воспроизводимых физических процессов и являющихся характерными для имитируемой обстановки;
* имитацию наблюдаемых объектов;
* формирование физических сигналов в масштабе реального времени;
* отображение и регистрацию имитируемых процессов и событий;
* расчет настроечных кодов для управления аппаратной частью системы.

В основу построения системы положена концепция, основными составляющими которой являются:

* сочетание методов математического моделирования, программного имитационного моделирования и применения специализированных цифровых структур;
* использование только программно-управляемых цифровых структур, позволяющих управлять временными, вероятностными, корреляционными и спектральными характеристиками формируемых физических процессов и сигналов путем замены содержимого внутренних запоминающих устройств (настроечных кодов) по сигналам управляющей ЭВМ;
* агрегатируемая структура, позволяющая из ограниченного набора модулей создавать несколько десятков конфигураций автоматизированных систем;
* возможность перенастройки имитирующей аппаратуры без прекращения процесса генерации сигналов, что позволяет формировать как стационарные, так и нестационарные процессы.

Эффективность применения предлагаемой системы определяется:

* возможностью сокращения объема натурных испытаний в условиях реальной эксплуатации и уменьшением продолжительности этапов НИР и ОКР;
* сокращением трудоемкости подготовки моделирования и испытаний и длительности собственно процессов исследований;
* возможностью обеспечения единства условий моделирования и испытаний, высокой точности воспроизведения задаваемых режимов, упрощением метрологического обеспечения испытаний и научных исследований;
* возможностью автоматизации всех этапов моделирования и испытаний от их подготовки до протоколирования и интерпретации результатов;
* возможностью воспроизведения нестационарных режимов изменения параметров и нагрузок и проведения программно-управляемых испытаний на экстремальные нагрузки и т.д.;
* возможностью проведения исследований и испытаний систем без излучения сигналов в эфир.

КИМУ РТС имеет следующие особенности, отличающие ее от систем, предназначенных для решения аналогичных задач:

* наличие в ее составе аппаратных средств генерации случайных и псевдослучайных физических процессов и сигналов с программноуправляемыми вероятностными, корреляционными (спектральными) свойствами; это позволяет эффективно, без затрат вычислительной мощности имитировать случайные шумы и помехи РТС; кроме того, предлагаемая система малогабаритна (транспортабельна), имеет широкий спектр применений;
* представление выходных сигналов как в цифровой, так и в аналоговой формах, причем обеспечивается возможность цифрового программного управления всеми параметрами генерируемого сигнала;
* возможность автоматического контроля и диагностики;
* высокая эффективность прикладного программного обеспечения, использующего последние достижения теории расчетов динамических моностатических и бистатических характеристик вторичного излучения подвижных объектов различных типов, статистического моделирования помех, статистического и аналитического моделирования сложных систем управления, каналов обработки и измерения параметров радиотехнических систем;
* универсальность, обеспечиваемая широкими возможностями математических методов, статистического и аналитического моделирования радиотехнических систем и систем автоматического управления, наличием оперативно пополняющегося банка данных математических моделей радиотехнических систем, сигналов, помех и объектов радиолокации;
* высокая гибкость и адаптируемость, обеспечиваемая модульным принципом ее построения, наличием цифровой системы управления режимами работы, эффективного математического обеспечения обработки результатов испытаний, а также наличием элементов искусственного интеллекта;
* возможность автоматизированной идентификации структуры и параметров математических моделей испытуемых систем;
* возможность проведения полунатурных испытаний радиотехнических систем в целом, а также их элементов в динамике многоцелевых (многосигнальных) ситуаций, на фоне различного рода помех в условиях близких к реальным на всех этапах жизненного цикла системы.

КИМУ РТС позволяет решать следующие основные задачи:

* + 1. полунатурные испытания радиотехнических систем различного назначения;
    2. полунатурное моделирование реальных условий работы радиотехнических систем следующих классов:
    - наземных и бортовых радиолокационных станций обзора (в том числе

РЛС с синтезируемой апертурой);

* + - наземных и бортовых радиолокационных станций точного измерения координат;
    - бортовых радиопеленгаторов;
    - бортовых радиовысотомеров;
    - систем радиосвязи;
    - систем радионавигации;
    - систем радио- и радиотехнической разведки;
    1. оперативный безоблетный контроль зон видимости радиолокационных станций в местах их дислокации;
    2. создания тренажерных комплексов для различных типов РЛС и РТС;
    3. проверка функционирования и снятие характеристик обнаружения каналов обработки принимаемых сигналов;
    4. проверка функционирования и снятие характеристик систем распознавания по отраженным или излученным сигналам;
    5. проверка функционирования и снятие точностных характеристик измерителей координат и параметров летательных аппаратов;
    6. проверка функционирования и снятие характеристик средств помехозащиты;
    7. испытания и оценка эффективности радиотехнических систем.



Рис. 11.1 Обобщенная структурная схема КИМУ РТС